

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Ю.Л. ГЕВОРКЯН, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Надані визначення та розроблені елементи математичної теорії абсолютної та умовної стійкості гідромеханічних систем, що описуються рівняннями з зосередженими параметрами. Описані причини динамічної нестійкості диференціального та зворотного клапанів.

Даны определения и разработаны элементы математической теории абсолютной и условной устойчивости гидромеханических систем, описываемых уравнениями с сосредоточенными параметрами. Описаны причины динамической неустойчивости дифференциального и обратного клапанов.

Definitions and developed elements of the mathematical theory of absolute and conditional stability of hydromechanical systems described by equations with lumped parameters. Describes why the dynamic instability of the differential and check valves.

Постановка задачи. В данной публикации мы продолжим исследование, начатое в [1], и изучим условия, которые приводят к динамической неустойчивости клапанных гидромеханических узлов. Схемы узлов, применяемых в опытных образцах дизельной топливной аппаратуры, показаны на рис. 1 (смотри также [2 – 4]).

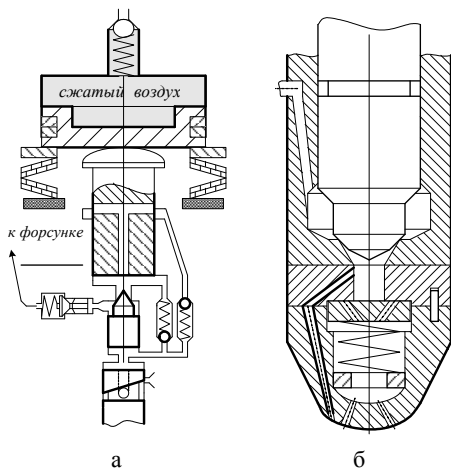


Рисунок 1 – Схемы гидромеханических узлов: а – насоса с аккумулярующим плунжером и газовым поршнем; б – форсунки с изменяемым числом работающих сопловых отверстий.

Математическая модель узла. Рассматривается узел, состоящий из n полостей и m клапанов. Объём i -той полости обозначается w_i , давление жидкости в ней – p_i , скорость и перемещение s -го клапана – c_s и h_s соответственно. Площадь эффективного сечения канала, связывающего i -ю и j -ю полости, обозначаем μf_{ij} , площадь (или часть площади) s -того клапана, на которую действует перепад давлений между полостями i и j – $f_{ij}^{(s)}$. Некоторые полости узла соединены с трубопроводами; площади поперечного сечения трубопроводов,

перепад давлений между полостями i и j – $f_{ij}^{(s)}$. Некоторые полости узла соединены с трубопроводами; площади поперечного сечения трубопроводов,

связанных с i -той полостью обозначаем f_{ik}^{mp} , где k – номер трубопровода. Если объём этой полости изменяется не только при перемещениях клапанов, но и за счёт движения плунжеров, то соответствующую этому движению объёмную скорость обозначаем q_i .

С учётом принятых обозначений уравнение объёмного баланса для i -ой полости и уравнения движения s -го клапана примут следующий вид:

$$\alpha w_i \frac{dp_i}{dt} = - \sum_j [\mu f_{ij} s(p_i - p_j) + \sum_s f_{ij}^{(s)} c_s] + \sum_k (f_{ik}^{mp} / (a\rho))(p_i - F_{ik}) + q_i(t), \quad (1)$$

$$m_s \frac{dc_s}{dt} = \sum_{i,j} f_{ij}^{(s)} (p_i - p_j) - k_s [c_s(t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} c_s(t - l T_s)] - F_{np.o}^{(s)}; dh_s / dt = c_s(t), \quad (2)$$

где F_{ik} – величина отражённой волны давления, приходящей по k -тому трубопроводу в момент времени t (смотри [5]); m_s – масса клапана; k_s – коэффициент пропорциональности в формуле для определения силы пружины с учётом продольных колебаний витков (смотри [6]), $k_s = 0.5 \cdot z_s \cdot T_s$; $z_s, F_{np.o}^{(s)}$ – жёсткость и усилие предварительной затяжки пружины клапана; T_s – период свободных колебаний пружины; $s(\Delta P) = \sqrt{(2/\rho) \cdot |\Delta P|} \cdot \text{sign}(\Delta P)$ – линейная скорость жидкости при перепаде давлений ΔP .

Некоторые из давлений p_j , используемые в правой части уравнений (1) – (2), могут быть известными функциями времени либо константами и не относятся к динамическим параметрам узла.

Составим из динамических параметров p_i, c_i и h_i векторы-столбцы $\vec{p}, \vec{c}, \vec{h}$ и перепишем систему уравнений (1) для $i \in \overline{1, n}$ и (2) для $s \in \overline{1, m}$ в матрично-векторной форме:

$$[W] \times d\vec{p} / dt = -\vec{Q}(\vec{h}, \vec{p}, t) - [FK] \times \vec{c} - [FT] \times \vec{p} + \vec{Q}_0(t), \quad (3)$$

$$[M] \times d\vec{c} / dt = [FK]^T \times \vec{p} - [Z] \times \vec{c} - \vec{F}_0(t); \quad d\vec{h} / dt = \vec{c}(t), \quad (4)$$

где $[W], [FT], [M], [Z]$ – диагональные матрицы порядков n и m ,

$$W_{ii} = \alpha(p_i) \cdot w_i; FT_{ii} = \sum_k f_{ik}^{mp} / (a\rho); M_{ss} = m_s; Z_{ss} = k_s \quad i = 1, \dots, n; s = 1, \dots, m;$$

$[FK]$ – прямоугольная матрица размера $[n \times m]$, составленная из площадей $f_{ij}^{(s)}$ поперечного сечения клапанов; знак “ T ” обозначает операцию транспонирования матрицы; компоненты вектора \vec{Q} имеют вид

$$Q_i = \sum_j \mu f_{ij}(\vec{h}, t) \cdot s(p_i - p_j). \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) составлены в полном соответствии с законами со-

хранения массы и импульса, то есть в отношении этих законов используемая модель является замкнутой (консервативной). Признаком замкнутости модели в отношении закона сохранения импульса является косая симметрия коэффициентов, используемых в правых частях этих уравнений. В то же время перетекание жидкости между полостями, описываемое *законом потеранных скоростей*, сопровождается переходом части механической энергии в тепло (что приводит к нагреванию жидкости и омываемых поверхностей). Аналогичные переходы происходят при ударе клапана о седло или ограничитель хода; все удары считаются полностью неупругими. Поэтому в отношении закона сохранения энергии данная модель остаётся открытой.

Линеаризуем зависимости (5), и однородную систему уравнений (3)-(5), отвечающую условиям $\bar{Q}_0(t) = 0$, $\bar{F}_0(t) = 0$ запишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} [V] \\ [M] \\ [I] \end{pmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{c} \\ \bar{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B] & -[FK] & [D] \\ [FK]^T & [Z] & [\Theta] \\ [\Theta] & [I] & [\Theta] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{c} \\ \bar{h} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $B_{ij} = -\partial Q_i / \partial p_j - FT_{ij}$; $D_{ij} = -\partial Q_i / \partial h_j$; $[I], [\Theta]$ – единичная и нулевая матрицы.

Далее в этой статье мы рассмотрим несколько конкретных примеров таких матричных моделей и с их помощью проанализируем динамическую устойчивость соответствующих узлов. Но прежде сформулируем (напомним) необходимые определения и докажем ряд утверждений.

Основные определения. Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{X}} = F(\bar{X}, t), \quad (7)$$

описывает изменение во времени параметров некоторой гидромеханической системы, а вектор-функция $\bar{X}(t)$ является решением этого уравнения, отвечающим начальному условию $\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0$; она называется *невозмущённым движением* системы.

Изменим начальные условия *задачи Коши* и дадим вектору \bar{X}_0 малое приращение $\delta \bar{X}_0$. При этом мы получим решение \bar{Y} уравнения (7), которое, по крайней мере, при $t \approx t_0$ будет близким к $\bar{X}(t)$. Оно называется *возмущённым движением* системы.

Разность этих движений обозначим $\delta \bar{X}(t)$, то есть $\bar{Y}(t) = \bar{X}(t) + \delta \bar{X}(t)$. Вектор - функция $\delta \bar{X}(t)$ удовлетворяет условию $\delta \bar{X}(t_0) = \delta \bar{X}_0$ и называется *возмущением движения*.

Будем считать возмущение $\delta \bar{X}(t)$ малым и линеаризуем правую часть

уравнения (7):

$$F(\vec{X} + \delta\vec{X}, t) = F(\vec{X}, t) + A(t) \cdot \delta\vec{X},$$

где $A(t)$ – некоторая квадратная матрица, называемая *матрицей возмущения*.

Тогда
$$\dot{\vec{X}} + \delta\dot{\vec{X}} = F(\vec{X}, t) + A(t) \cdot \delta\vec{X} \quad \text{и}$$

$$\delta\dot{\vec{X}} = A(t) \cdot \delta\vec{X}. \quad (8)$$

Таким образом, вектор возмущения является решением однородного дифференциального уравнения (8), общее решение которого имеет вид:

$$\delta\vec{X}(t) = \Pi(t, t_0) \cdot \delta\vec{X}(t_0),$$

где квадратная матрица $\Pi(t, t_0)$ может быть представлена в виде *мультипликативного интеграла*

$$\Pi(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp(A(\tau) \cdot d\tau). \quad (9)$$

Невозмущённое движение называется *устойчивым (по А.М. Ляпунову)*, если при всех $t > t_0$ нормы матриц $\Pi(t, t_0)$ равномерно ограничены, то есть существует такая константа $M < \infty$, что

$$\|\Pi(t, t_0)\| \leq M;$$

в противном случае движение называется *неустойчивым*.

Невозмущённое движение называется *асимптотически устойчивым*, если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Pi(t, t_0)\| = 0.$$

Невозмущённое движение называется *динамически устойчивым в момент времени t* , если все ненулевые собственные числа λ_j матрицы $A(t)$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad (10)$$

в противном случае оно называется *динамически неустойчивым в момент t* .

Из определений следует, что если движение является асимптотически устойчивым, то оно оказывается и устойчивым по Ляпунову. Заметим, что в практических задачах устойчивость по Ляпунову, как правило, оказывается асимптотической.

Норма матрицы колебаний. Получим удобную оценку для нормы блочной вещественной J - симметричной матрицы

$$S = \begin{pmatrix} B & -F \\ F^T & C \end{pmatrix}, \quad B \leq 0, \quad C \leq 0, \quad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ \Theta & -I \end{pmatrix}.$$

Для этого составим матрицу $A = S^T \cdot S$ и оценим её спектр:

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ -F^T & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & -F \\ F^T & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2 + F \cdot F^T & -B \cdot F + F \cdot C \\ -F^T \cdot B + C \cdot F^T & C^2 + F^T \cdot F \end{pmatrix}.$$

Для оценки будем использовать след этой матрицы. В результате получаем:

$$\|S\| \leq Sp(B^2 + F \cdot F^T) + Sp(C^2 + F^T \cdot F).$$

Нормы ортогональных и J - ортогональных матриц. Если матрица U является ортогональной, то её норма равняется 1.

$$\text{Действительно,} \quad B = U^T \cdot U = I \Rightarrow \lambda_M = 1.$$

Если матрица U является не ортогональной, а J - ортогональной, то матрица $B = U^T \cdot U$ оказывается симметричной, положительной и также J - ортогональной. Спектр такой матрицы разбивается на пары собственных чисел λ , $1/\lambda$, причём все эти числа не могут равняться 1 (иначе матрица U будет ортогональной). Следовательно, норма J - ортогональной (но не ортогональной) матрицы обязательно больше 1.

Норма обратной матрицы. Предположим, что матрица A является невырожденной. Тогда:

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|^2 &= \max_{Z \neq \Theta} \frac{\langle A^{-1} \cdot Z, A^{-1} \cdot Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} = |Z = A \cdot X| = \max_{X \neq \Theta} \frac{\langle X, X \rangle}{\langle A \cdot X, A \cdot X \rangle} \geq \\ &\geq \min_{X \neq \Theta} \frac{\langle X, X \rangle}{\langle A \cdot X, A \cdot X \rangle} = \left(\max_{X \neq \Theta} \frac{\langle A \cdot X, A \cdot X \rangle}{\langle X, X \rangle} \right)^{-1} = \|A\|^{-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, нормы исходной и обратной матрицы связаны условием

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1. \quad (11)$$

Абсолютная и асимптотическая устойчивость. Докажем, что если все собственные числа λ_j матрицы A удовлетворяют условию (10) $\text{Re } \lambda_j < 0$, то матрица $B(t) = \exp(A \cdot t)$ при $t \rightarrow +\infty$ является сжимающей.

При доказательстве будем считать, что матрица A имеет диагональное представление

$$A = X \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot X^{-1}.$$

Тогда

$$B(t) = X \cdot \text{diag}(\exp(\lambda_1 \cdot t), \exp(\lambda_2 \cdot t), \dots, \exp(\lambda_n \cdot t)) \cdot X^{-1} = X \cdot D(t) \cdot X^{-1}.$$

Диагональные элементы матрицы $D(t)$ имеют вид:

$$\exp(\lambda_j \cdot t) = \exp(t \cdot \operatorname{Re} \lambda_j) \cdot [\cos(t \cdot \operatorname{Im} \lambda_j) + i \cdot \sin(t \cdot \operatorname{Im} \lambda_j)].$$

Если число t устремить к бесконечности, то в силу условия (10) все диагональные элементы этой матрицы будут стремиться к нулю, следовательно

$$D(T) \rightarrow \Theta \text{ и } \|D(t)\| \rightarrow 0.$$

Тогда $\|B(t)\| = \|X \cdot D(t) \cdot X^{-1}\| \leq \|X\| \cdot \|X^{-1}\| \cdot \|D(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, и это означает, что существует такое $T < +\infty$, что при всех $t > T$ выполняется условие

$$\|B(t)\| < 1,$$

то есть матрица $B(t)$ становится сжимающей.

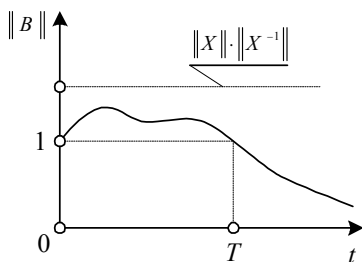


Рисунок 2 – Характер изменения нормы.

Если учесть, что в задачах из технических приложений величина t — это время, то полученный результат можно трактовать так: через определённый период времени T любой вектор $X(t)$, являющийся решением уравнения

$$\dot{X} = A \cdot X$$

при некотором начальном условии $X(0) = X_0$, будет иметь меньшую евклидову длину, чем вектор начальных условий X_0 .

Характерное изменение нормы матрицы $B(t)$ показано на рис. 2. То, что $\|B(0)\| = 1$, очевидно. Кроме того, должно быть понятно, что если

$$\left. \frac{d}{dt} \|B(t)\| \right|_{t=0} \leq 0, \text{ то } \|B(t)\| \leq 1$$

при всех $t > 0$, и тогда $T = 0$.

Но если производная положительна, то $T > 0$, а график нормы может иметь несколько максимумов и минимумов и выглядеть достаточно сложно.

Время до начала сжатия: сколько нужно ждать? Приведенное в предыдущем пункте исследование носит качественный характер и не даёт прямых количественных оценок для периода времени ожидания T . Произведение норм $\|X\| \cdot \|X^{-1}\|$, как показано в (11), всегда больше 1, поэтому если пользоваться приведенными выше неравенствами, то окажется, что величина T обязана быть положительной.

Однако эти неравенства являются слишком грубыми и не дают возмож-

ность понять, что в ряде случаев ждать вообще не придётся, то есть матрица $B(t)$ является сжимающей при любом $t > 0$, а, значит, её норма монотонно убывает (рис. 3).

Очевидно, что так будет, например, в том случае, если матрица A окажется диагональной. Но этот случай встречается редко. Куда более важным является другой случай, когда эта матрица оказывается блочной J - симметричной *матрицей колебаний*

$$S = \begin{pmatrix} B & -F \\ F^T & C \end{pmatrix}.$$

Действительно, в этом случае произведение $X^T(t) \cdot X(t)$ пропорционально полной механической энергии системы, и поэтому евклидова длина вектора $X(t)$ с течением времени t монотонно убывает (или, по крайней мере, не возрастает), следовательно,

$$\|\exp(S \cdot t)\| \leq 1 \text{ при всех } t > 0.$$

Заметим, что доказать этот же факт *алгебраически*, не используя физический смысл решаемой задачи, трудно. В следующем пункте мы приведём свой вариант формального доказательства этого результата.

Устойчивость мультипликативного матричного интеграла. Покажем, что если непрерывная матрица-функция $C(t)$ в каждый момент времени t удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}(C(t)) < 0, \quad (12)$$

то матрица $\Pi = \int_0^t \exp(C(\tau) \cdot d\tau)$ является сжимающей.

Для этого мы, прежде всего, для вычисления матрицы $\exp[C(\xi) \cdot \Delta\tau]$ воспользуемся формулой

$$\exp[C(\xi) \cdot \Delta\tau] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{1}{k} \cdot C(\xi) \cdot \Delta\tau \right)^k$$

и докажем, что матрица $A = I + C(\xi) \cdot (\Delta\tau / k)$ при больших k сжимающая.

Представим матрицу $B = A^T \cdot A$ в виде суммы: $B = I + G + H$, где $G = [C(\xi) + C^T(\xi)] \cdot (\Delta\tau / k) = 2 \cdot \operatorname{Re}(C(\xi)) \cdot (\Delta\tau / k)$; $H = C^T(\xi) \cdot C(\xi) \cdot (\Delta\tau / k)^2$.

Матрица G имеет вещественный и отрицательный спектр, все точки λ которого удовлетворяют условию

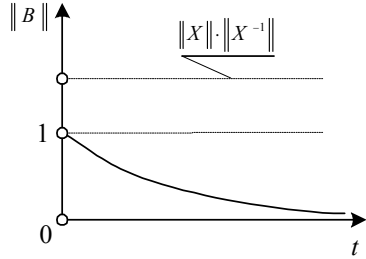


Рисунок 3 – Монотонный характер изменения нормы.

$$-a(\xi) \cdot (\Delta \tau / k) \leq \lambda \leq -b(\xi) \cdot (\Delta \tau / k),$$

где $a(\xi)$, $b(\xi)$ – некоторые положительные числа.

Поэтому при достаточно малом значении $(\Delta \tau / k)$ все точки спектра матрицы $I + G$ попадают внутрь отрезка $]0; 1 - b(\xi) \cdot (\Delta \tau / k)[$, и

$$\|I + G\| < 1 - b(\xi) \cdot (\Delta \tau / k).$$

Норма матрицы H оценивается так:

$$\|H\| \leq \|C^T(\xi)\| \cdot \|C(\xi)\| \cdot (\Delta \tau / k)^2 = c(\xi) \cdot (\Delta \tau / k)^2, \text{ где}$$

$$c(\xi) = \|C^T(\xi)\| \cdot \|C(\xi)\|.$$

Поэтому

$$\|B\| \leq \|I + G\| + \|H\| \leq 1 - b(\xi) \cdot (\Delta \tau / k) + c(\xi) \cdot (\Delta \tau / k)^2,$$

и

$$\begin{aligned} \|\exp[C(\xi) \cdot \Delta \tau]\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - b(\xi) \cdot (\Delta \tau / k) + c(\xi) \cdot (\Delta \tau / k)^2)^k = \\ &= \exp(-b(\xi) \cdot \Delta \tau). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\exp[C(\xi) \cdot \Delta \tau]\| \leq \exp(\lambda_{\max}(\xi) \cdot \Delta \tau),$$

где $\lambda_{\max}(\xi) < 0$ – наибольшее собственное число матрицы $\text{Re } C(\xi) < 0$, и

$$\|P\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \exp(\lambda_{\max}(\xi_i) \cdot \Delta \tau_i) = \exp\left(\int_0^t \lambda_{\max}(\xi) \cdot d\xi\right) < 1, \quad (13)$$

то есть матрица P – сжимающая.

Полученный результат, в частности, означает, что если матрица $C(t)$ в каждый момент времени t является блочной J -симметричной матрицей (матрицей колебаний S), то уравнение вида $\dot{X} = S \cdot X$ имеет не только устойчивое, но и *абсолютно устойчивое* решение (то есть *пакет решений, отвечающих различным начальным условиям, с течением времени монотонно сжимается*).

Покажем, что если не требовать от решения абсолютной устойчивости, а ограничиться обычной или асимптотической устойчивостью, то мы сможем использовать полученный результат для большего числа уравнений.

Прежде всего, рассмотрим уравнение вида $\dot{X} = D^{-1} \cdot S(t) \cdot X$, которое, например, получается из исходного уравнения $D \cdot \dot{X} = S(t) \cdot X$ в результате простейшего («грубого») преобразования, нарушающего симметрию матрицы. Для сравнения напомним, как выглядит «тонкое» преобразование, сохра-

няющее симметрию:

$$D^{1/2} \cdot \dot{X} = D^{-1/2} \cdot S(t) \cdot D^{-1/2} \cdot D^{1/2} \cdot X, \text{ то есть } \dot{Y} = \hat{S}(t) \cdot Y,$$

где
$$Y = D^{1/2} \cdot X; \quad \hat{S}(t) = D^{-1/2} \cdot S(t) \cdot D^{-1/2}.$$

Матрицы $\hat{S}(t)$ и $A(t) = D^{-1} \cdot S(t)$ имеют одинаковый спектр, но первая из них удовлетворяет условию (12), а вторая – нет.

Это, в частности, означает, что решения Y являются абсолютно устойчивыми, а решения X могут таковыми не быть. Но, в силу существования зависимости $X = D^{-1/2} \cdot Y$, решения X будут устойчивыми. Поэтому, при решении практических задач переход к обобщённым координатам (фазовым переменным) является желательным, но, всё же, он не обязателен.

Другое расширение круга уравнений касается уже не формы решения, а существа задачи. Пусть матрица - функция $C(t)$ такова, что условие (12) $[C(t) + C^T(t)] < 0$ выполняется не при всех t , но максимальное собственное число $\lambda_{\max}(t)$ матрицы $[C(t) + C^T(t)]$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} \lambda_{\max}(t) \cdot dt = -\infty.$$

Тогда, как это непосредственно следует из оценки (13), норма матрицы $P(t)$ стремится при $t \rightarrow +\infty$ к нулю, а решения уравнения $\dot{X} = C(t) \cdot X$ асимптотически устойчивы.

Лучшее - враг хорошего. Мы подтвердим эту истину, используя хрестоматийный пример из теории (и истории) регулирования. После знакомства с представленными выше (а также в [1]) результатами может сложиться впечатление, что движение любой механической системы является устойчивым. Чтобы развеять эту иллюзию, мы ниже проанализируем ещё один пример. Но прежде хотелось бы подчеркнуть, что в большинстве случаев движение механической системы действительно является устойчивым. И причина устойчивости лежит, как вы, наверное, это понимаете, не в той плоскости, которая изучается здесь при помощи матриц, а гораздо глубже.

Действительно, если хотя бы одно собственное число $\lambda = \alpha + i \cdot \beta$ матрицы C , используемой в уравнении

$$\dot{X} = C \cdot X, \tag{14}$$

попадёт не в левую, а в правую полуплоскость, то в решении этого уравнения появятся слагаемые, амплитуда которых будет возрастать со скоростью $\exp(\alpha \cdot t)$. Поскольку этот экспоненциальный рост будет происходить неог-

раниченно, то и энергия колебательного движения также будет возрастать до бесконечности.

И тут возникают естественные вопросы – откуда система черпает эту энергию? Не ошиблись ли мы при составлении уравнения (14)? Возможно, мы не учли все влияющие факторы и связи?

Часто так и бывает, и после исправления уравнений устойчивость решения восстанавливается. Но бывают и другие ситуации, в которых для восстановления устойчивости приходится не исправлять уравнения, а изменять сам моделируемый объект. Для этого объект оснащается, например, дополнительным механическим (или гидромеханическим) узлом, называемым *регулятором*. В школьном курсе физики знакомят с устройством и принципом работы *регулятора Уатта* (рис. 4), используемого на первых паровых машинах. За прошедшие годы техника ушла далеко вперёд и ни сами эти двигатели, ни их регуляторы теперь не используются. Но им на смену пришли другие машины, и там, чтобы спроектировать надёжно работающий регулятор, понадобится знание спектра матрицы высокого порядка. А мы сейчас воспользуемся

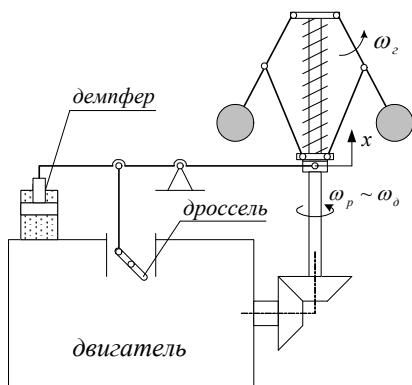


Рисунок 4 – Предельный регулятор Уатта.

простейшей динамической моделью машинного агрегата и ограничимся классическим исследованием спектра получаемой при этом матрицы третьего порядка.

Примем, что крутящий момент $M_{кр}$, развиваемый паровой машиной, пропорционален перемещению x муфты регулятора, а момент сопротивления M_c пропорционален угловой скорости ω_δ вращения её вала, то есть

$$M_{кр} = -k_{рег} \cdot x ; \quad M_c = f_{ов} \cdot \omega_\delta .$$

На установившемся режиме работы машины наблюдается равновесие между центробежной силой F_u , пытающейся увеличить угол раскрытия грузов, и силой пружины F_{np} , стремящейся уменьшить этот угол. Примем, что вблизи положения равновесия изменение первой силы пропорционально отклонению $\delta\omega_\delta$ угловой скорости вала двигателя, а второй – перемещению муфты регулятора, то есть:

$$\Delta F_u = k_{ов} \cdot \delta\omega_\delta ; \quad \Delta F_{np} = k_{ep} \cdot x .$$

Тогда работа паровой машины, снабжённой центробежным регулятором Уатта, приближённо описывается следующей системой уравнений:

$$j_{zp} \cdot \dot{\omega}_{zp} = -f_{pez} \cdot \omega_z + k_{\partial\delta} \cdot \delta\omega_{\partial} - k_{zp} \cdot x;$$

$$j_{\partial\delta} \cdot \dot{\delta\omega}_{\partial\delta} = -k_{\partial\delta} \cdot \omega_{zp} - f_{\partial\delta} \cdot \delta\omega_{\partial} - k_{pez} \cdot x; \quad z_{np} \cdot \dot{x} = k_{zp} \cdot \omega_{zp},$$

где j_{zp} , $j_{\partial\delta}$ – моменты инерции, приведенные к грузам и к валу двигателя;
 z_{np} – коэффициент жёсткости пружины; f_{pez} – приведенный коэффициент трения в регуляторе (главным образом – в его гидравлическом демпфере).

Перепишем систему в форме матричного дифференциального уравнения

$$D \cdot \dot{Y} = A \cdot Y,$$

где $D = \text{diag}(j_{zp}, j_{\partial\delta}, z_{np})$; $Y = \begin{pmatrix} \omega_{zp} \\ \delta\omega_{\partial\delta} \\ x \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} -f_{pez} & k_{\partial\delta} & -k_{zp} \\ -k_{\partial\delta} & -f_{\partial\delta} & -k_{pez} \\ k_{zp} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

К сожалению, матрица A не является блочной J - симметричной матрицей (матрицей колебаний); этому «мешает» коэффициент регулирования k_{pez} . Если убрать это препятствие и принять $k_{pez} = 0$, то матрица A будет удовлетворять условию $A + A^T \leq 0$, гарантирующему устойчивость. Но, отсоединив тягу от дроссельной заслонки, мы оставили двигатель без его предельного регулятора! В результате, если произойдёт резкий сброс нагрузки, то величина угловой скорости вала станет недопустимо высокой, и машина пойдёт «в разнос» (пусть и устойчиво, но от осознания этого факта окружающим легче не станет).

Прежде, чем исследовать спектр задачи, перейдём к обобщённым переменным и получим матрицу

$$S = D^{-1/2} \cdot A \cdot D^{-1/2} = \begin{pmatrix} -\hat{f}_{pez} & \hat{k}_{\partial\delta} & -\hat{k}_{zp} \\ -\hat{k}_{\partial\delta} & -\hat{f}_{\partial\delta} & \hat{k}_{pez} \\ \hat{k}_{zp} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

все элементы этой матрицы имеют физическую размерность [1/с].

Далее найдём коэффициенты характеристического многочлена и воспользуемся *критерием Рауса–Гурвица* [7]:

$$-\det(S - \lambda I) = \lambda^3 + \lambda^2 (\hat{f}_{\partial\delta} + \hat{f}_{zp}) + \lambda (\hat{f}_{\partial\delta} \hat{f}_{zp} + \hat{k}_{\partial\delta}^2 + \hat{k}_{zp}^2) + \hat{k}_{zp} (\hat{f}_{\partial\delta} \hat{k}_{zp} + \hat{k}_{\partial\delta} \hat{k}_{pez}).$$

Получается, что работа машины будет асимптотически устойчивой в том, и только в том случае, если выполнится условие:

$$(\hat{f}_{\partial\delta} + \hat{f}_{zp})(\hat{f}_{\partial\delta} \hat{f}_{zp} + \hat{k}_{\partial\delta}^2 + \hat{k}_{zp}^2) > \hat{k}_{zp} (\hat{f}_{\partial\delta} \hat{k}_{zp} + \hat{k}_{\partial\delta} \hat{k}_{pez}),$$

или, что эквивалентно,

$$(\hat{f}_{\partial\delta} + \hat{f}_{\partial p})(\hat{f}_{\partial\delta}\hat{f}_{\partial p} + \hat{k}_{\partial\delta}^2) + \hat{f}_{\partial p}\hat{k}_{\partial p}^2 > \hat{k}_{\partial p}\hat{k}_{\partial\delta}\hat{k}_{\text{рез}}$$

Ясно, что эти условия выполняются не при любых соотношениях коэффициентов. В частности, если уменьшать коэффициент трения $f_{\partial p}$ и снижать моменты инерции $j_{\partial p}$, $j_{\partial\delta}$, то вероятность нарушения условия возрастет.

Именно это в своё время и произошло с новыми быстроходными паровыми машинами, которые начали выпускать в середине XIX - го столетия. Стремясь до предела уменьшить трение в регуляторе, конструкторы «загнали» двигатели в зону неустойчивой работы. Потом, когда математики разобрались с причиной неустойчивости, регулятор стали оснащать гидравлическим демпфером, увеличивающим трение. С этого момента и началась история новой науки – теории автоматического регулирования.

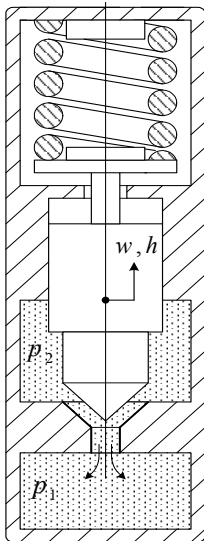


Рисунок 5 –
Схема клапана.

Неустойчивость клапана в режиме опрокинутого течения. Выполнение условия (13)

$$b \cdot f < -a \cdot z_{np}$$

из статьи [1] предполагает, что течение жидкости происходит в направлении, противоположном подъёму клапана. Ясно, что возникающий *режим опрокинутого течения* далёк от положения статического равновесия, и это обстоятельство должно быть учтено при линеаризации системы уравнений. Но учесть его не сложно: достаточно заменить равновесные значения Δp_0 и h_0 теми реальными значениями $\Delta p(t_0)$ и $h(t_0)$, которые наблюдаются в данный момент времени t_0 .

Если мы будем и в этом случае считать, что площадь проходного сечения пропорциональна подъёму клапана, то указанное условие можно представить в следующем виде

$$2 \cdot f \cdot \Delta p < -z_{np} \cdot h.$$

На практике это условие выполняется буквально сразу же после опрокидывания течения, поэтому все такие режимы считаются статически (и динамически) неустойчивыми.

Дифференциальный клапан. Но в технике используются и такие клапана, для которых обратное направление течения жидкости является основным. К таковым, например, относится так называемый *дифференциальный клапан*, рис. 5.

Очевидная особенность этого клапана заключается в том, что силы давления жидкости, действующие на клапан из полостей системы, здесь не вычитаются, а складываются. Кроме того, перемещение клапана приводит к изменению суммарного объёма жидкости в полостях системы, то есть *закон сохранения объёма* здесь не действует.

Часть поперечного сечения клапана, контактирующая с полостью 2 (обозначим её f_2), называется *дифференциальной площадкой*; остальную часть этой площади обозначим f_1 . Тогда, если мы повторим для этого случая все преобразования, проведенные в примере из статьи [1], то получим ту же самую задачу, в которой матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & -f_1 & -b \\ a & -a & -f_2 & b \\ f_1 & f_2 & 0 & -z_{np} \\ 0 & 0 & z_{np} & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не имеет пропорциональных строк или столбцов, но всё же является вырожденной. Поэтому, как и в предыдущем случае, одно из собственных чисел матрицы $D^{-1} \cdot A$ равно 0, а три остальных являются решением кубического уравнения

$$\lambda^3 + \frac{a\lambda^2}{\alpha w} + \frac{\lambda}{m\alpha} \left(\alpha z_{np} + \frac{f_1^2}{w_1} + \frac{f_2^2}{w_2} \right) = \frac{-1}{m\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} \left[\frac{f^2}{w_1 w_2} + \frac{\alpha z_{np}}{w} \right] + b \left[\frac{f_1}{w_1} - \frac{f_2}{w_2} \right] \right),$$

где $f = f_1 + f_2$; $1/w = 1/w_1 + 1/w_2$.

Как следует из полученного результата, оказалось, что если при проектировании клапана выдержать пропорцию

$$f_1 / f_2 = w_1 / w_2, \quad (15)$$

то он будет устойчиво работать при любых подъёмах и перепадах давления. Действительно, в этом случае коэффициент b не влияет на корни уравнения, а если мы подставим в матрицу A значение $b = 0$, то получим J -симметричную матрицу колебаний.

Далее мы будем предполагать, что $f_1 / f_2 > w_1 / w_2$. Тогда, если коэффициент $b < 0$ (что соответствует перепаду давлений $\Delta p = p_1 - p_2 < 0$ и течению жидкости по направлению, указанному стрелками), то *условие Гурвица* [7]

$$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \quad (16)$$

будет заведомо выполнено, и причиной неустойчивости может быть только нарушение условия $a_3 > 0$. Это возможно, если

$$h < [(f_1/w_1 - f_2/w_2)/(f^2/(w_1 + w_2) + \alpha \cdot z_{np})] \cdot (2 \cdot \alpha \cdot w \cdot |\Delta p|), \quad (17)$$

то есть при малых (α , возможно, и при не очень малых) подъёмах клапана.

Обнаруженная динамическая неустойчивость в зоне малых подъёмов дифференциального клапана на самом деле может оказаться полезной, поскольку ускоряет его открытие. Так, например, для форсунок (рис. 6) дизельных двигателей (где $f_1/f_2 \gg w_1/w_2$) указанная зона может занимать весь рабочий интервал подъёма клапана (иглы) или его большую часть. Благодаря этому до минимума сокращается продолжительность того участка, где малый подъём иглы оказывает сильное дросселирующее влияние на поток.

При проектировании форсунки нужно добиться того, чтобы игла не «зависала» в промежуточном положении, а двигалась от нижнего упора к верхнему упору и обратно. Поэтому зону динамической неустойчивости по условию (17), приходится не сужать, а расширять.

Когда коэффициент $b > 0$ (что соответствует течению жидкости в противоположном направлении), то теперь условие $a_3 > 0$ заведомо выполняется, а условие (16) будет нарушено, если

$$h < 2 \cdot \alpha \cdot \Delta p / (f_1/w_1 - f_2/w_2). \quad (18)$$

Чтобы дифференциальный клапан работал качественно и надёжно, зона неустойчивости (18) должна быть сужена до предела. Иначе он может легко потерять герметичность и «распахиваться» даже под действием сил упругости нижнего упора (седла). В форсунках дизелей ширина этой зоны составляет доли микрона, то есть этот эффект имеет только теоретическое значение.

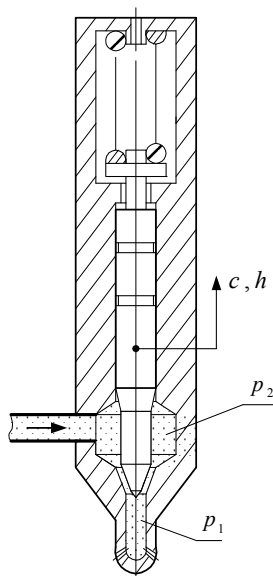


Рисунок 6 – Форсунка.

Определения абсолютной и относительной устойчивости. В форсунках высокооборотных дизелей и во многих других технических устройствах все переходные процессы настолько скоротечны, что динамическая неустойчивость, как правило, не приводит к тем тяжёлым последствиям, которые, например, наблюдались при неправильной работе регулятора паровой машины (смотри выше).

Пусть вектор - функция $\delta \vec{X}$, составленная из возмущений динамических параметров устройства, является решением уравнения

$$\dot{\delta \vec{X}} = A(t) \cdot \delta \vec{X}. \quad (19)$$

Составим матрицу

$$\operatorname{Re} A(t) = (1/2) \cdot (A + A^T).$$

Если эта матрица при всех $t \in [0; T]$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} A(t) < 0$, то невозмущённое движение на промежутке $t \in [0; T]$ называется *абсолютно устойчивым*. При этом, как это уже было показано выше, матрица

$$P(t, 0) = \int_0^t \exp(A(\tau) \cdot d\tau),$$

оказывается сжимающей при всех $t > 0$, что и гарантирует монотонное с течением времени t уменьшение евклидовой нормы вектора возмущений $\delta \vec{X}(t)$.

Предположим, теперь, что матрица $A(t)$ при всех (или при некоторых) t не удовлетворяет условию $\operatorname{Re} A(t) < 0$. Обозначим её максимальное собственное число $\lambda_{\max}(t)$. Тогда, в силу оценки (13), норма мультипликативного интеграла $P(t, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\|P(t, 0)\| \leq \Lambda(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) \cdot d\tau\right).$$

Если причины, вызывающие возмущение решения, действуют только в начальный момент времени $t = 0$, то мы можем ограничиться этой оценкой.

Но когда для интегрирования уравнений движения используются численные методы, то причины, вызывающие возмущение решения, действуют непрерывно (в каждый момент времени $t_0 \in [0; T]$). Возмущение решение связано в этом случае, как с погрешностью используемого метода, так и с округлением чисел в процессоре. Поэтому наряду с матрицей - функцией $P(t, 0)$ мы обязаны рассмотреть семейство мультипликативных интегралов

$$P(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp(A(\tau) \cdot d\tau),$$

и выполнить для них аналогичную оценку:

$$\|P(t, t_0)\| \leq \Lambda(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) \cdot d\tau\right). \quad (20)$$

Пусть функция $\Lambda(t, t_0)$ для всех $t, t_0 \in [0; T]$ удовлетворяет условию

$$\Lambda(t, t_0) < M,$$

где M – некоторая константа, *существенно меньшая бесконечности* (обычно $M = 10 \dots 1000$).

Тогда невозмущённое движение на промежутке времени $t \in [0; T]$ считается *относительно устойчивым*.

Смысл этого термина поясняет рис. 7. На заштрихованных участках, где

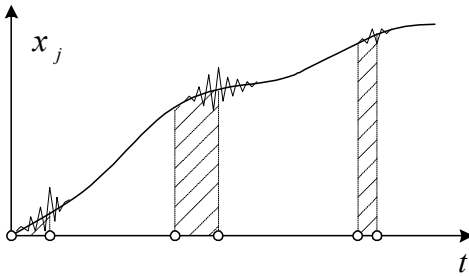


Рисунок 7 – Характер движения в условиях относительной устойчивости.

наблюдается возрастание амплитуды возмущения, имеет место динамическая неустойчивость движения, а там, где эта амплитуда уменьшается, движение устойчиво. Константа M обычно выбирается с учётом того, чтобы амплитуда возмущений оставалась существенно (на несколько

порядков) меньшей амплитуды основного тона колебаний (и, возможно, нескольких обертонов); в противном слу-

чае возмущения начинают «взаимодействовать» с невозмущённым движением, и выполненная линеаризация уравнений математической модели теряет смысл.

Кроме того, если максимум функции $\Lambda(t, t_0)$ окажется слишком большим, то на результаты расчёта начнут оказывать существенное влияние погрешности округления чисел в компьютере, что недопустимо.

Абсолютная устойчивость клапана. Если мы используем эту теорию для прямого или дифференциального клапана, то получим, что характерно, одну и ту же матрицу

$$\operatorname{Re}(A) = D^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} -a - \hat{q} & a & 0 & -b/2 \\ a & -a - f_m & 0 & b/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b/2 & b/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot D^{-1/2},$$

у которой одно собственное число равно 0, а три остальных удовлетворяют некоторому кубическому уравнению. В частности, если полости изолированы ($\hat{q} = 0$; $f_m = 0$), то это уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + [a/(\alpha \cdot w)] \cdot \lambda^2 - (b/2)^2 / (\alpha \cdot w \cdot z_{np}) \cdot \lambda = 0.$$

В этом случае, поскольку $b \neq 0$, то одно из собственных чисел (обозначим его $\lambda_{\max}(t)$) оказывается положительным при всех значениях t . Следовательно, переходный процесс в таком устройстве не является абсолютно устойчивым, но, если воспользоваться оценкой (20), то ещё имеется шанс пока-

зять, что он относительно устойчив.

Если полости не изолированные, а проточные, то, как правило, на разных фазах переходного процесса величина $\lambda_{\max}(t)$ принимает значения разных знаков. Уменьшение диагональных элементов матрицы A смещает весь спектр матрицы $\text{Re } A$ влево по вещественной оси и, тем самым, повышает устойчивость движения.

Разобранный пример даёт возможность подчеркнуть ещё один важный момент. Оказалось, что значения площадей f_1, f_2 поперечного сечения дифференциального клапана (или общей площади f поперечного сечения прямого клапана) вообще не влияют на спектр матрицы $\text{Re } A$.

В то же время, эти величины влияют на спектр матрицы A . Более того, выбор площадей f_1, f_2 в соответствии с пропорцией (15) гарантирует расположение всех собственных чисел этой матрицы в левой полуплоскости.

Следовательно, выполнение условия (10) все $\text{Re } \lambda_j < 0$ не гарантирует выполнение условия (12) $\text{Re } A < 0$. Кроме того, в том случае, если

- матрица A имеет элементы, изменяющиеся с течением времени,
 - анализируемый переходный процесс является длительным,
- то выполнение условий (10) ещё не гарантирует устойчивость и асимптотическую устойчивость движения.

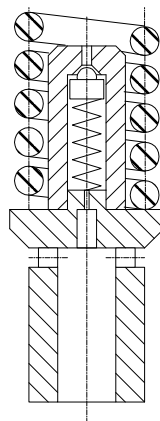


Рисунок 8 –Клапан двойного действия.

Динамическая неустойчивость обратного клапана. Клапан, показанный на рис. 8, был разработан для дизелей семейств *КамАЗ* и *ЯМЗ* и предназначался для стабилизации остаточного давления в топливной системе. Но во время проведения испытания на стендах выяснилось, что обратный шариковый клапан теряет герметичность (смотри [8]). Для выяснения причин была составлена матричная математическая модель этого узла и получено уравнение для собственных частот λ :

$$\det[A - \lambda \cdot D] = 0, \text{ где } D = \text{diag}(\alpha w_1; \alpha w_2; \alpha w_3; \alpha w_4; m_k; 1);$$

$$A = \begin{bmatrix} -q_f - q_{1,2} & q_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{1,2} & -q_{1,2} - q & q & 0 & -f_k & -d \\ 0 & q & -q - q_{3,4} & q_{3,4} & f_k & d \\ 0 & 0 & q_{3,4} & -q_{3,4} - q_{4,0} & 0 & 0 \\ 0 & f_k & -f_k & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

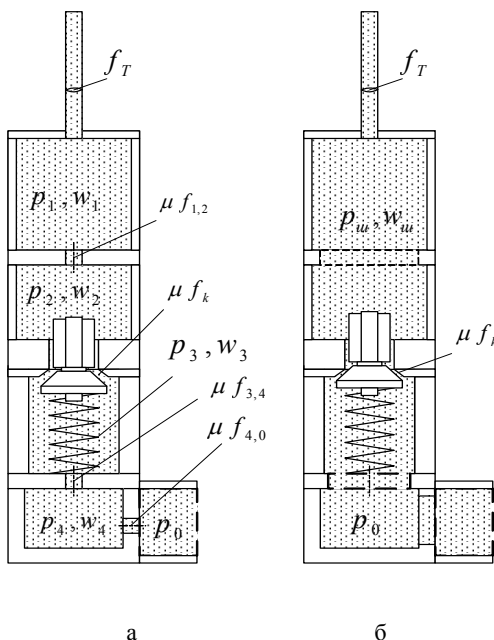


Рисунок 9 – Гидравлическая схема для динамического анализа при существенных (а) и малых (б) подъёмах обратного клапана.

$$q_{4,0} = \mu f_{4,0} \sqrt{1/(2\rho |p_4 - p_0|)};$$

$$q = \mu f_k(h) \sqrt{1/(2\rho |p_2 - p_3|)};$$

$$q_{1,2} = \mu f_{1,2} \sqrt{1/(2\rho |p_1 - p_2|)};$$

$$q_{3,4} = \mu f_{3,4} \sqrt{1/(2\rho |p_3 - p_4|)};$$

$$q_f = f_T / (a\rho);$$

$$d = d\mu f_k(h) / dh \cdot s(p_2 - p_3);$$

$$z = z_k \cdot T_{np,k} / 2.$$

Обозначения разъяснены на рис. 9. Если $d = 0$, то матрица A является матрицей колебаний.

Анализ уравнения показал, что при возрастании величины $q_{1,2}$ все собственные частоты λ_j перемещаются по комплексной плоскости влево, что приводит к повышению устойчивости.

Аналогичное свойство имеет место и в отношении величин $q_{3,4}$ или $q_{4,0}$. Следовательно, для достижения предельно возможной устойчивости узла дроссели должны быть убраны, и мы приходим к схеме рис. 9 б.

При анализе схемы выявлена неустойчивость обратного клапана для вы-

соких значениях остаточного давления $p_{ост}$, вызванная нарушением условия

$$f_T d_{шар} \operatorname{tg} \phi > 3 w_{ш} \sqrt{2 \alpha p_{ост}},$$

где $d_{шар}$ – диаметр шарика; ϕ – угол запорного конуса.

Были намечены пути устранения неустойчивости; результаты их практической реализации описаны в [9].

Выводы. Разграничены и конкретизированы понятия абсолютной и условной динамической устойчивости гидромеханической системы, разработаны необходимые элементы математической теории и приведены примеры. Доказано, что режим опрокинутого течения сопровождается неустойчивостью клапанного узла. Получены условия обеспечения устойчивости гидромеханических узлов с дифференциальными и обратными клапанами.

Список литературы: 1. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов // смотри статью в настоящем сборнике. – С.74-87. 2. Григорьев А.Л., Врублевский А.Н. Универсальный метод гидродинамического расчёта топливного насоса свободнопоршневого двигателя // Вестник НТУ «ХПИ» – Харьков, 2001. – Вып.1. – С.65-80. 3. Єроценков С.А., Григор'єв О.Л., Зонов В.Д. Математичне моделювання процесу паливоподачі в форсунках спеціальної конструкції // Збірник наукових праць ХарДАЗТ. – Харків, 2001. – Вип. 45. – С.82-88. 4. Врублевский А.Н., Григорьев А.Л., Грицюк А.В., и др. Особенности математического моделирования гидромеханических процессов ЭГФ // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – № 1. – С. 44-52. 5. Подача и распыливание топлива в дизелях / И. В. Астахов, В. И. Трусев, А.С. Хачиян и др. - М.: Машиностроение, 1972. 6. Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л. О связи силы пружины с законом её деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1985. – Вып.39. – С.7-22. 7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. 8. Григорьев А.Л. Анализ условий устойчивости обратного клапана дизельного топливного насоса // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – № 1. – С. 8-13. 9. Єлістратов В.О. Підвищення стабільності впорскування палива комбінованою паливною системою дизеля. – Автореферат дис. ... канд. техн. наук. за спец. 05.05.03 – двигуни та енергетичні установки. – Харків, 2011. – 20 с.

Поступила в редколлегию 29.12.11